SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA UNIVERSITA' DI BOLOGNA

F. SEGALA

PARAMETRICI PER OPERATORI TIPO TRICOMI

26 GENNAIO-2 FEBBRAIO 1984

Sia $A(t,x,Dx)$ un operatore differenziale del 2° ordine con simbolo principale positivo e sia $B(t,x,D_t,Dx)$ un operatore differenziale del 1° ordine. Per ogni fissata $f \in C^\infty(R_t, \mathcal{E}'(R^N))$ siamo interessati alla costruzione di una $u \in C^\infty(R_t, \mathcal{D}(R^N))$ tale che

$$(1) \qquad (D_t^2 + tA + N)u - f \in C^\infty(\Omega)$$

con Ω intorno di $(t_o, x_o) \in R_t \times R_x^N$.

Se $t_o > 0$, u si costruisce utilizzando gli operatori pseudo-differenziali, se to < 0, si utilizzano i F.I.O.. Se to = 0 la u si costruisce mediante certe funzioni di Airy [2, 3]. Noi qui effettueremo le considerazioni e i calcoli sul modello $D_t^2 + t\,|Dx|^2$; per il caso generale si vedano [2, 3]. Precisamente, in [2] viene rappresentata con gli operatori integrali di Fourier-Airy la soluzione v del problema di Cauchy

$$(2) \qquad \begin{cases} (D_t^2 + t\,|Dx|^2)\, v = f & t \leqq 0 \\ v|_{t=0} = \psi & \\ D_t v|_{t=0} = \phi & \end{cases}$$

ed in [3] vi è la costruzione della w soluzione del problema di Dirichlet

$$(3) \qquad \begin{cases} (D_t^2 + t\,|Dx|^2) w = f & t \geqq 0 \\ w|_{t=0} = g & \end{cases}$$

Scegliamo come dati del problema (2) $\psi = g$ e $\phi = D_t w|_{t=0}$.
Allora se definiamo

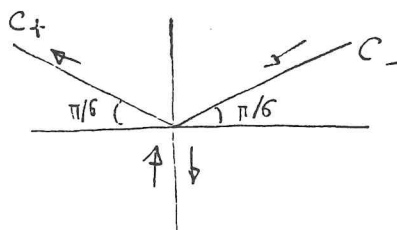
$$u(t) = \begin{cases} w(t) & t \geq 0 \\ v(t) & t \leq 0 \end{cases}$$

si ha

$$(D_t^2 + t\,|Dx|^2)u = f$$

1. COSTRUZIONE DI v

Poniamo $A^{\cdot}\pm(z) = \int_{C\pm} e^{i(tz-t^3/3)}\,dt$

dove C± sono i cammini nel piano complesso indicati in figura

Allora $A''_{\pm}(z) = z\,A(z)$ e [4]

(4) $$A\pm(\rho) = F\pm(\rho)\,e^{\pm i\frac{2}{3}|G|^{3/2}}\quad,\ \rho \leq 1$$

(5) $$F_{\pm}^{(k)}(\rho) \sim |\rho|^{-\frac{1}{4}-k}\quad,\ \rho \leq 1.$$

Consideriamo gli operatori

$$G\pm\ (t,s)f(x) = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \frac{A\pm(t|\xi|^{2/3})}{A'\pm(S|\xi|^{2/3}} \ \hat{f}(\xi)\ d\xi$$

dove $t \leqq s \leqq 0$. Se $|t||\xi|^{2/3} \leqq 1$, anche $|s||\xi|^{2/3} \leqq 1$

ed allora $A\pm\ (t|\xi|^{2/3})/A'_\pm\ (s|\xi|^{2/3}) \in \overset{\circ}{S}_{1,2/3,2/3}$. Se $|t||\xi|^{2/3} \geqq 1$ e $|s||\xi|^{2/3} \leqq 1$ segue da (4) e (5) che $A\pm(t|\xi|^{2/3})/A'_\pm(s|\xi|^{2/3} =$
$= m_\pm\ (t,s,\xi)\ e^{\pm \frac{2}{3} i|t|^{3/2}|\xi|}$ con $m_\pm \in \overset{\circ}{S}_{1,2/3,2/3}$. Infine se $|s||\xi|^{2/3} \geqq 1$, sempre per (4), (5) si ottiene
$A_\pm(t|\xi|^{2/3})/A'_\pm(s|\xi|^{2/3}) = n_\pm(t,s,\xi)\ e^{\pm \frac{2}{3} i(|t|^{3/2}-|s|^{3/2})|\xi|}$ con
$n\pm \in \overset{\circ}{S}_{1,2/3,2/3}$. Quindi

$$G\pm(t,s)f(x) = 1\pm\ (t,s,D)f(x)$$

$$+ \int e^{i\ [\langle x,\xi\rangle \pm \frac{2}{3} |t|^{3/2}|\xi|]}\ m\pm\ (t,s,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi$$

$$+ \int e^{i\ [\langle x,\xi\rangle \pm \frac{2}{3}(|t|^{3/2} - |s|^{3/2})|\xi|]}\ n\pm\ (t,s,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi$$

Se $s = 0$, $t < 0$ fissato,

$$G\pm\ (t,o)f(x) \equiv \int e^{i\ [\langle x,\xi\rangle + \frac{2}{3}|t|^{3/2}|\xi|]}\ q\pm\ (t,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi$$

$$\Rightarrow\quad WFG\pm\ (t,o)\ f \subset \{(y \pm \frac{2}{3}\ |t|^{3/2}\eta/|\eta|\ ,\ \eta)\,|\,(y,\eta) \in WFf\}$$

Se $t < s < 0$ sono fissati,

$$G\pm\ (t,s)f(x) \equiv \int e^{i[\langle x,\xi\rangle + \frac{2}{3}(|t|^{3/2} - |s|^{3/2})|\xi|]} P\pm(t,s,\xi)\hat{f}(\xi)\ d\xi$$

$$WF\ G\pm\ (t,s)\ f \subset \{(y \pm \frac{2}{3}(|t|^{3/2} - |s|^{3/2})\ \eta/|\eta|\ ,\eta)\,|\,(y,\eta) \in WFf\}$$

Ora abbiamo

$$G\pm\ (s,s)f(x) = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \frac{A\pm\ (s|\xi|^{2/3})}{A'_\pm\ (s|\xi|^{2/3})}\ \hat{f}(\xi)\ d\xi$$

$$D_t\ G_\pm\ (s,s)f(x) = \frac{1}{i}\ |Dx|^{2/3}$$

Consideriamo

$$\det L = \det \begin{Vmatrix} |\xi|^{2/3} \dfrac{A+(s|\xi|^{2/3})}{A'+(s|\xi|^{2/3}} & |\xi|^{2/3} \dfrac{A-(s-|\xi|^{2/3})}{A'-(s|\xi|^{2/3})} \\ \dfrac{1}{i}\ |\xi|^{2/3} & \dfrac{1}{i}\ |\xi|^{2/3} \end{Vmatrix}$$

$$= \frac{1}{i}\ |\xi|^{4/3} \frac{1}{A'-(s|\xi|^{2/3})A'-(s|\xi|^{2/3})}\ [A+(s|\xi|^{2/3})A'-(s|\xi|^{2/3}) -$$

$$- A-(s|\xi|^{2/3})\ A'_+\ (s|\xi|^{2/3})]\ ,$$

ma A_+ e A_- sono funzioni di Airy e dunque

$$(A_+\ A'_- - A_-\ A'_+)' = A'_+\ A'_- + A_+\ tA_- - A'_-\ A'_+ - A_-\ t\ A_+ = 0$$

da cui det L = cost $|\xi|^{4/3}/ A'_+ A'_-)$

Consegue che la matrice

$$\left\| \begin{matrix} |Dx|^{2/3} G_+ (s,s) & |Dx|^{2/3} G - (s,s) \\ D_t G_+(s,s) & D_t G_-(s,s) \end{matrix} \right\|$$

è invertibile poiché per (4), (5), $A_\pm (s|\xi|^{2/3})/A'_\pm(s|\xi|^{2/3}) \in S^0_{1,2/3}$.

Indichiamo con

$$K(s) = \left\| \begin{matrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) \\ K_{21}(s) & K_{(22}(s) \end{matrix} \right\|$$

l'inversa. Poniamo quindi

$$I(t,s) = |D_x|^{2/3} G_+(t,s) K_{11}(s) + |Dx|^{2/3} G_-(t,s) K_{21}(s)$$

$$J(t,s) = G_+ (t,s) K_{12}(s) + G_+(t,s) K_{22}(s)$$

Ora

$$I(s,s) = I \qquad D_t I(s,s) = 0$$

$$J(s,s) = 0 \qquad D_t J(s,s) = I$$

La soluzione v di (2) è allora

$$v(t) = I(t, o)\psi + J(t,o)\phi + \int_0^t J(t,s)f(s,x)\, ds$$

2. CENNO AL CASO GENERALE

Indichiamo con $a_2\ (t,x,\xi)$ il simbolo princale di A e consideriamo l'equazione iconale

$$(6) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\phi_\pm}{\partial t}\right)^2 = -t\ a_2\left(t,x, \dfrac{\partial\phi_\pm}{\partial x}\right) \\ \phi_\pm\ (0,x,\xi) = \langle x,\xi\rangle \end{cases}$$

Si prova [2] che esistono $\theta, \rho \in C^\infty([-T,0] \times R^N \times \dot{R}^N)$ omogenee di grado 1 e 2/3 con $\theta(t,x,\xi) = \langle x,\xi\rangle + t^2\ \gamma(t,x,\xi)$, $\rho(o,x,\xi) = 0$, $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\ (0,x,\xi) < 0$ tali che

$$\phi_\pm = \theta \pm \frac{2}{3}\rho^{3/2}$$

è soluzione di (4).

Per la costruzione di $\phi_\pm$, si applica la teoria di Hamilton-Jacobi all'equazione

$$(7) \qquad \frac{d\psi}{ds} = 2s^2\ a_2\left(s^2, x\ \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{1/2}$$

Se ψ è soluzione di (7), $\phi\pm\ (t,x,\xi) = \psi(\pm\sqrt{t}, x, \xi)$ è soluzione di (6).

Introduciamo gli operatori

$$G_{\pm}(t)\, f(x)$$

$$= \int e^{i\theta(t,x,\xi)}\{g(t,x,\xi)\, A_{\pm}(G(t,x,\xi)) - ih(t,x,\xi)\, A'_{\pm}(G(t,x,\xi))\}\hat{f}(\xi)d\xi$$

con $g \sim \sum_{0}^{+\infty} g_{-\nu}$, $h \sim \sum_{0}^{+\infty} h_{-\frac{1}{3}-\nu}$ classici. Dalla definizione di $A_{\pm}$

segue

$$\int e^{i\theta}\,\{g\, A_{\pm}(\rho) - ih\, A'_{\pm}\,(\rho)\}\,\hat{f}\, d\xi$$

$$= \int_{C_{\pm}} (g + \tau h)\, e^{i(-\tau^{3}/3 + \tau\rho + \theta)}\, d\tau \quad \hat{f}\, d\xi$$

Posto $\phi = -\tau^{3/3} + \tau\,\rho + \theta$, $a(t,x,\xi,\tau) = g(t,x,\xi) + \tau\, h(t,x,\xi)$,
$(D_t^2 + tA + B)\; G_{\pm}(t)f(x) = 0$ segue da

$$\int_{C_{\pm}} (D_t^2 + tA + B)(a\, e^{i\phi})\, d\tau = O(|\xi|^{-\infty}).$$

Attribuiamo a τ peso 1/3 cosicché $a_{-\nu}$ quasi-omogenea di grado $-\nu$. In generale diremo che $b(t,x,\xi,\tau)$ è quasi-omogenea di grado m se $b(t,x,\lambda\xi,\lambda^{1/3}\tau) = b(t,x,\xi,\tau)\,\lambda^{m}$. L'osservazione che facciamo ora è cruciale. Sia $B(t,x,\xi,\tau)$ un polinomio in τ quasi omogeneo di grado m tale che $B(t,x,\xi, \pm\sqrt{\rho}) = 0$. Allora possiamo fattorizzare come $B(t,x,\xi,\tau) = (\tau^2 - G)\; Q(t,x,\xi,\tau)$, dove Q è un polinomio in τ èmogeneo di grado m - 2/3.

Integrando per parti si trae

$$\int_{C_\pm} B\, e^{i\phi}\, d\tau \quad = \quad \int_{C_\pm} (\tau^2 - G)\, Q\, e^{i\phi}\, d\tau$$

$$= \int_{C_\pm} - i \frac{\partial}{\partial\tau}\, e^{i\phi}\, Q\, d\tau = i \int_{C_\pm} e^{i\phi} \frac{\partial Q}{\partial\tau}\, d\tau$$

e $\dfrac{\partial Q}{\partial\tau}$ (derivata complessa) è quasi-omogenea di grado $m - 1$. Ora

$$\int_{C_\pm} (D_t^2 + tA + B)(a\, e^{i\phi})\, d\tau$$

$$= \int_{C_\pm} e^{i\phi}\, (\Psi + L + M)a\, d\tau$$

dove $\Psi(t,x,\xi,\tau) = \dfrac{\partial\phi}{\partial t}^{2} + t\, a_2\, (t\, a_2\, (t,x, \dfrac{\partial\phi}{\partial x}),$ $L = L(t,x,\xi,\tau, D_t, D_x)$: funzioni quasi-omogenee di grado $m \to$ funzioni quasi-omogenee di grado $m + 1$, $M = M(t,x,\xi,\tau,D_t,D_x)$: funzioni quasi-omogenee di grado $m \to$ funzioni quasi-omogenee di grado m. Sappiamo che $\Psi(t,x,\xi, \pm \sqrt{\rho}) = 0$ per cui per l'osservazione precedente, $\Psi(t,x,\xi,\tau) = (\tau^2 - \rho)\, Q(t,x,\xi,\tau)$. Se $g \sim \Sigma\, g{-\nu}$ e $h \sim \Sigma\, h_{-\nu-1/3}$, poniamo $a_{-\nu} = g_{-\nu} + \tau\, h{-\nu}$. Allora

$$\int_{C_\pm} (D_t^2 + tA + B)(a\, e^{i\phi})d\tau$$

$$= \int_{C_\pm} \Psi\, a_o e^{i\phi} d\tau \; + \int_{C_\pm} (\Psi\, a_{-1} + L\, a_o) e^{i\phi} d\tau$$

$$+ \sum_{2}^{+\infty} \int_{C_\pm} (\Psi\, a_{-\nu} + L\, a_{-\nu+1} + M\, a_{-\nu+2})\, e^{i\phi}\, d\tau$$

Abbiamo visto che $\int_{C_\pm} \Psi a_{-\nu} e^{i\phi} d\tau = i \int_{C_\pm} e^{i\phi} \frac{\partial}{\partial t} (Q a_{-\nu}) d\tau$

Perciò possiamo scrivere

$$\int_{C_\pm} (D_t^2 + tA + B)(a\, e^{i\phi})\, d\tau$$

$$= \int_{C_\pm} [L\, a_o + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_o)]\ e^{i\phi}\, d\tau\ +$$

$$+ \int_{C_\pm} [L a_{-1} + M\, Q_o + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q\, a_{-1})]\ e^{i\phi}\, d\tau$$

$$+ \sum_2^\infty \int_{C_\pm} [L\, Q_{-\nu} + M\, a_{-\nu+1} + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q\, a_{-\nu})]\ e^{i\phi}\, d\tau$$

Richiediamo $(L\, a_o + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_o))|_{r = \pm\ G} = 0$

Allora sempre per l'osservazione precedente

$$\int_{C_\pm} (D_t^2 + tA + B)\ (a e^{i\phi})\, d\tau = \int_{C_\pm} [L\, a_{-1} + M a_o + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_{-1}) + F_{-1}]\ e^{i\phi} d\tau\ +$$

$$+ \sum_2^\infty \int_{C_\pm} [L\, a_{-\nu} + M\, a_{-\nu+1} + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q\, a_{-\nu})]\ e^{i\phi}\, d\tau$$

Dunque le equazioni del trasposto assumono la forma

$$L\, a_{-\nu} + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q\, a_{-\nu}) - F_{-\nu}|_{\tau = \pm \sqrt{\rho}} = 0 \qquad (8)$$

Non è difficile vedere che posto $a^{\pm}_{-\nu} = g_{-\nu} \pm \sqrt{\rho}\, h_{-\nu-1/3}$ la (8) si scri ve come

$$2(\theta_t \pm \sqrt{\rho}\, G_t)\, \frac{\partial Q^{\pm}_{-\nu}}{\partial t}$$

$$(9)_{\pm} \qquad - \Sigma\, t\, \frac{\partial a_2}{\partial \xi_k}\, (t,x,\theta_x \pm \sqrt{\rho}\, \rho_x)\, \frac{\partial a^{\pm}_{-\nu}}{\partial x_k} + C(t,x,\xi, \pm \sqrt{\rho})\, a^{\pm}_{-\nu} = F^{\pm}_{-\nu}$$

Per le proprietà di ρ , si può considerare il cambiamento di variabile $t \to \rho$. Definiamo

$$\hat{a}^{\pm}_{-\nu}(\rho,x,\xi) = a^{\pm}_{-\nu}\, (t(\rho,x,\xi),\, x,\xi)$$

$$a^{\pm}_{-\nu}(s,x,\xi) = \hat{a}^{\pm}(s^2,x,\xi)$$

Le $(9)_{\pm}$ diventano

$$(10)_{\pm} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\, \hat{\hat{a}}^{\pm}_{-\nu} + \displaystyle\sum_1^N e^{\pm}_k\, \frac{\partial \hat{a}^{\pm}_{-i}}{\partial x_k} + e^{\pm}_{N+1}\, \hat{\hat{a}}^{\pm}_{-\nu} = F_{-\nu} \\[2ex] \tilde{\hat{a}}^{\pm}_{-\nu}\, (0,x,\xi) = \begin{cases} 1 & \nu = 0 \\ 0 & \nu > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Quindi dalle soluzioni di $(10)_{\pm}$ si ottengono le soluzioni di $(9)_{\pm}$ prendendo

$$a^{\pm}_{-\nu}\, (t,x,\xi) = \hat{a}^{\pm}_{-\nu}\, (\sqrt{\rho(t,x,\xi)},\, x,\, \xi).$$

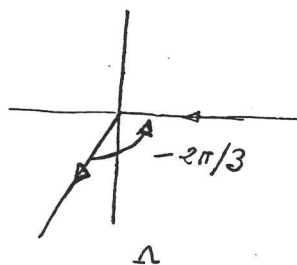
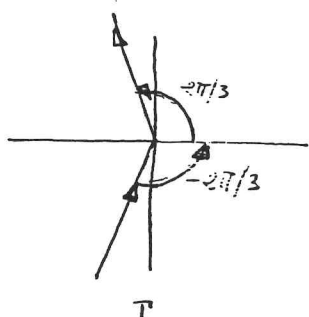
3. COSTRUZIONE DI w

Prendiamo in esame ora il problema di Dirichlet [3] e cominciamo dal caso in cui $f \equiv 0$.

Introduciamo le funzioni di Airy $A(z)$ e $B(z)$ così definite

$$A(z) = \frac{1}{2\Pi i} \int_{\Gamma} \exp(z\,t - t^3/3)\,dt \tag{11}$$

$$B(z) = \frac{1}{2\Pi i} \int_{\Lambda} \exp(zt - t^3/3)\,dt \tag{12}$$

dove i cammini Γ e Λ sono rappresentati in figura

E' noto [4] che

$$A(\rho) \sim \rho^{-1/4}\, e^{-\frac{2}{3}\rho^{3/2}} \quad , \quad \rho \geqq 1 \tag{13}$$

$$B(\rho) \sim \rho^{-1/4}\, e^{\frac{2}{3}\rho^{3/2}} \quad , \quad \rho \geqq 1. \tag{14}$$

Consideriamo l'operatore

$$H(t)g(x) = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} A(t|\xi|^{2/3})\, \hat{g}(\xi)\, d\xi \tag{15}$$

Ovviamente

$$(16)\qquad \begin{cases} (D_t^2 + t|D_x|^2)\, H(t)g(x) = 0 \\ H(0)g(x) = g(x) \end{cases}$$

Osserviamo che a $t > 0$ fissato l'operatore $g \to H\, g(t,\cdot)$ è regolarizzante. Indichiamo con Φ^m la classe dei simboli $a(t,x,\xi)$ che verificano le stime

$$|t^p\, D_t^j\, D_\xi^\alpha\, D_x^\beta\, a| \leq c(1 + |\xi|)^{m-|\alpha| + \frac{2}{3}(j-p)}$$

Allora $k_o = A(t|\xi|^{2/3}) \in \Phi^o$.

Per esempio $|D_t^j\, k_o| = |A^{(j)}(t|\xi|^{2/3})|\, |\xi|^{2j/3} \leq c|\xi|^{2j/3}$

se $t|\xi|^{2/3} \leq 1$, mentre se $t|\xi|^{2/3} \geq 1$, utilizzando la (13) si trae

$|D_t^j\, K_o| \leq C(t|\xi|^{2/3})^{j/2}\, e^{-2t^{3/2}|\xi|/3}\, |\xi|^{2j/3} \leq C\, |\xi|^{2j/3}$.

$t^p|K_o| \leq c\, t^p\, |\xi|^{2p/3}\, |\xi|^{-2p/3} \leq C|\xi|^{-2p/3}$ quando $t|\xi|^{2/3} \leq 1$.

Se $t|\xi|^{2/3} \geq 1$ utilizzando nuovamente la (13) abbiamo

$$|t^p k_o| \leq C\; t^p\, e^{-2t^{3/2}|\xi|/3} = C\, (t|\xi|^{2/3})^p\, e^{-2t^{3/2}|\xi|/3}$$

$$|\xi|^{-2p/3} \leq c\, |\xi|^{-2p/3}.$$

Per quanto riguarda le derivate rispetto a ξ la stima segue da

$D_\xi^\alpha\, K_o$ = somma di elementi del tipo

$$t^k\, A^{(k)}(t|\xi|^{2/3})\, D_\xi^{\gamma_1}|\xi|^{2/3} \ldots D_\xi^{\gamma_k}\, |\xi|^{2/3}$$

con $\gamma_1 + \ldots + \gamma_k = \alpha$, $k \leqq |\alpha|$. Se $t|\xi|^{2/3} \leqq 1$, $|D_\xi^x K_o|$ $\leqq t^k \; |\xi|^{2K/3-|\alpha|} \leqq c \; |\xi|^{-|\alpha|}$, mentre se $+ \; |\xi|^{2/3} \geqq 1$ di nuovo si utilizza la (13).

Esaminiamo ora il problema (2) con f 0.

Poniamo

$$X = \bar{R}_t^+ \times \bar{R}_s^+ \times R_x^N \times \dot{R}_\xi^N$$

$$Y = \{(t,s,x,\xi) \in X | \; s \leqq t\}$$

$$Z = \{t,s,x,\xi) \in X | \; t \leqq s\}$$

Sia $(t,s,x,\xi) \to k(t,s,x,\xi) \in C^0(X) \cap C^\infty(Y) \cap C^\infty(Z)$

Formalmente consideriamo l'operatore

$$Kf(t,x,) = \iint_{s \geqq 0} e^{i\langle x,\xi\rangle} K(t,s,x,\xi) \; \hat{f}(s,\xi) ds \; d\xi \; ,$$

$$f \in C_0^\infty \; (R_t \times R_x^N)$$

Se assumiamo che k non dipende da x:

$$(D_t^2 + t|D_x|^2) \; Kf(t,x) = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \; \sigma_{D_t K} \; (t,\xi) \; \hat{f}(t,\xi) \; d\xi$$

(17) $$\iint_{s \geqq 0} e^{i\langle x,\xi\rangle} (D_t^2 \; k + t|\xi|^2 \; k) \; \hat{f}(s,\xi) \; d\xi \; ds$$

dove $\sigma_{D_t k} \; (t,\xi) = \lim_{s \nearrow t} D_t K(t,s,\xi) - \lim_{s \searrow t} D_t K(t,s,\xi)$.

Scegliamo $k(t,s,\xi)$ come segue

$$k(t,s,\xi) = \begin{cases} A(t|\xi|^{2/3})\ B(s|\xi|^{2/3}) & t \geq s \geq 0 \\ B(t|\xi|^{2/3})\ A(s|\xi|^{2/3}) & s \geq t \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che i $\sigma_{D_t k}(t,\xi) = |\xi|^{2/3}\ A'(t|\xi|^{2/3})\ B(t|\xi|^{2/3}) - B'(t|\xi|^{2/3})$ $A(t|\xi|^{2/3}) = i\gamma|\xi|^{2/3}$ poiché $(A'B - B'A)' = 0$.

Per come è stato scelto k abbiamo dunque

$$(D_t^2 + t|Dx|^2)\ Kf(t,x) = \gamma\ |Dx|^{2/3}\ f(t,x)$$

$$Kf(0,x) = \iint_{s\geq 0} e^{i\langle x,\xi\rangle}\ A(s|\xi|^{2/3})\ \hat{f}(s,\xi)\ ds\ d\xi$$

Poniamo $\tilde{K} = \frac{1}{\gamma}\ |Dx|^{-2/3}\ K$. La soluzione w di (3) è allora

$$w\ (t,x) = \tilde{K}f\ (t,x) + H(t)(g(x) - \tilde{K}f(0,x))\ .$$

4. CENNO AL CASO GENERALE

Consideriamo semplicemente il caso $A(t,x,Dx) = a_2(x,\xi)$, $B \equiv 0$ con a_2 omogenea di grado 2. Vediamo come in questo caso si costruisce H. Precisamente cerchiamo H nella forma

$$Hf(t,x) = \int \exp(i\langle x,\xi\rangle)\ h(t,x,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi$$

da cui segue

$$(D_t^2 + tA)\, Hf(t,x)$$

(18) $$= \int \exp(i\langle x,\xi\rangle)\, \{D_t^2 h + t\omega^2 h + 2 + \sum_1^N a_{ij}\, \xi_j\, D_j\, K$$

$$+ t\, \Sigma\, a_{ij}\, D_i\, D_j\, h\}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

avendo posto $\omega = \sqrt{a_2} = \sqrt{a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j}$.

Diremo che $\psi\,(t,x,\xi)$ è pseudo-omogeneo di grado m se $\psi(t/\lambda,\, x,\, \lambda^{3/2}\xi) = \lambda^m \psi\,(t,x,\xi)$ $\quad \lambda > 0$. Cerchiamo formalmente h come uno sviluppo asintotico del tipo $\sum_0^{-\infty} h_{-\frac{3}{2}}$ con $h_{-\frac{3}{2}\nu}$ pseudo-omogenea di grado $-\frac{3}{2}\nu$. Dalla (18) si trae dunque

$$(D_t^2 + tA)\, Hf(t,x)$$

$$\sim - \sum_0^{+\infty} \nu \quad \exp\,(i\langle x,\xi\rangle)\, \{h''_{-\frac{3}{2}\nu} - t\omega^2 h_{-\frac{3}{2}\nu} + F_{-\frac{3}{2}\nu+2}\}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

con $F_{-\frac{3}{2}\nu+2}$ pseudo-omogenea di grado $-\frac{3}{2}\nu+2$, $F_0 = 0$.

Le equazioni di trasporto sono dunque

(19) $$h''_{-\frac{3}{2}\nu} - t\omega^2 h_{-\frac{3}{2}\nu} = F_{-\frac{3}{2}\nu+2} \qquad (h_{-\frac{3}{2}(\nu-1)}, \ldots, h_0)$$

In [3] si prova che possiamo prendere come soluzioni delle (19)

$$h_o = A(t\omega^{2/3})$$

$$h_{-\frac{3}{2}\nu} = \sum_1^{\nu} t^{3j}\, g_{2j-\nu}(x,\xi)\, A(t\omega^{2/3})$$

$$+ \sum_{0\; j}^{\nu-1} t^{1+3j}\, g_{2j-\nu+2/3}(x,\xi)\, A'(t\omega^{2/3})$$

dove g_k è omogenea di grado k. Non è difficile provare che $h_{-\frac{3}{2}\nu} \in \Phi^{-\nu}$ e quindi si può definire $h \sim \sum_0^{+\infty} h_{-\frac{3}{2}\nu}$.

Osserviamo poi che $h_o(0,x,\xi) = 1$, $h_{-\frac{3}{2}\nu}(0,x,\xi) = 0$, $\nu \geqq 1$

La costruzione di K è più complessa. Cerchiamo $k(t,s,x,\xi)$ $\sim \sum_0^{+\infty} k_{-\frac{3}{2}\nu}(t,s,x,\xi)$ con $k_o \in C^0(X) \cap C^\infty(Y)$ $C^\infty(Z)$,

$k_{-\frac{3}{2}\nu} \in C^\infty(X) \cap C^\infty(Y)$, $k_{-\frac{3}{2}\nu}(\frac{t}{\lambda}, \frac{s}{\lambda}, x, \lambda^{3/2}\xi) = \lambda^{-\frac{3}{2}\nu}\, k_{-\frac{3}{2}\nu}(t,s,x,\xi)$

$\lambda > 0$. Allora segue

$$(D_t^2 + tA)\, Kf\,(t,x)$$

$$= \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\, \sigma_{D_t k}(t,x,\xi)\, \hat{f}(t,\xi)$$

$$+ \iint_{s\geqq 0} e^{i\langle x,\xi\rangle} \{e^{-i\langle x,\xi\rangle}(D_t^2 + tA)(e^{i\langle x,\xi\rangle} k(t,s,x,\xi))\}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

Scegliamo k_o in questo modo

$$k_o(t,s,x,\xi) = \begin{cases} A(t\omega^{2/3})\, B(s\omega^{2/3}) & t \geqq s \geqq 0 \\ B(t\omega^{2/3})\, A(s\omega^{2/3}) & s \geqq t \geqq 0 \end{cases}$$

Le equazioni di trasporto sono del tipo

$$k''_{-\frac{3}{2}\nu} - t\omega^2 k_{-\frac{3}{2}\nu} = G_{-\frac{3}{2}\nu+2} \ , \quad \nu \geqq 0 \ , \quad G_2 \equiv 0 \tag{20}$$

In [3] si prova che possiamo prendere $k_{-\frac{3}{2}\nu}$ soluzione di (20) con un comportamento del tipo

$$k_{-\frac{3}{2}\nu} \approx |\xi|^{-\nu} (t^{3/2} - s^{3/2})^j \, |\xi|^j \, A(t\omega^{2/3}) \, B(s\omega^{2/3}) \ , \quad t \geqq s \geqq 0$$

$$k_{-\frac{3}{2}\nu} \approx |\xi|^{-\nu} \, |(t^{3/2} - s^{3/2})^j \quad |\xi|^j \, A(s\omega^{2/3}) \, B(t\omega^{2/3}), \quad s \geqq t \geqq 0$$

Cioè si può definire $k \sim \sum_{0}^{+\infty} k_{-\frac{3}{2}\nu}$. Ora $\sigma_{D_t k}$ risulta essere uno pseudo-differenziale con simbolo principale cost $\omega^{2/3}$ e quindi ellittico.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. BOUTET DE MONVEL, Journal d'Analyse Math. XVII (1966) p. 241-304.

[2] M. IMAI, HOK K. Math. J. 8 (1979), p. 126-143.

[3] F. SEGALA, Parametrices for the operators of Tricomi's type. Apparirà su Ann. di Mat. Pura e Appl.

[4] W. WASOW, Asymototic expansions for ordinary differential equations. Interscience, 1965.